ESTUDIOS Y PUBLICACIONES

FORMACIÓN

LA FÓRMULA DE KELLY Y EL ASSET ALLOCATION ÓPTIMO EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO

DANIEL VILLALBA
CATEDRÁTICO DE ORGANIZACIÓN DE EMPRESAS

En estos últimos días se está comentando en varios medios[i] un artículo (aún pendiente de su publicación en una revista especializada), cuyos autores son dos conocidos gestores de fondos: Victor Haghani (Elm Partners y antes en Long-Term Capital Management) y Richard Dewey (Pimco)[ii].

En el mencionado artículo, se realiza un experimento consistente en darles 25 dólares y un laptop a 61 personas para apostar en un juego. Este consiste en lanzar una moneda al aire trucada en la que la probabilidad de que salga cara es de un 60% y de que salga cruz es de un 40%. Si sale cara se obtiene como premio el doble de la cantidad apostada, esto es lo apostado más otro tanto más. Y si sale cruz, se pierde el dinero apostado. La moneda se va lanzando al aire durante media hora o hasta que se llegue a unas ganancias máximas de 250 dólares. Estas personas deben apostar cada vez la cantidad que deseen en el juego (la totalidad de su capital o parte del mismo). El objetivo es conseguir la ganancia máxima al final de la media hora o hasta llegar a 250 dólares de ganancia, si esto se produce antes de la media hora.

El grupo de personas que participan en el juego está formado por directores de fondos (14), profesionales jóvenes del sector financiero y estudiantes universitarios de economía y finanzas.

La máxima ganancia para este juego se consigue aplicando la llamada fórmula de Kelly[iii] que, en este caso, consiste en apostar el 20% del capital que se tenga en cada momento y dejar el 80% restante guardado. Si se permite hacer un número suficiente de tiradas, la ganancia llegaría a ser infinita. Por este motivo, los autores del experimento limitaron las ganancias, que se pagaron realmente a los apostantes, a un máximo de 250 dólares.

De las 61 personas que jugaron a este juego, solo el 20% acertó en la solución óptima, un tercio perdieron dinero y en media ganaron solo 91 dólares, esto es, aproximadamente el 30% del máximo posible. El experimento demostró, no solo que una gran parte de los que jugaron no conocían la fórmula de Kelly, ni otras más generales, sino que también exhibieron algunos sesgos documentados[IV] en la literatura sobre *Behavioral Finance*.

Ciertamente, la conocida como fórmula de Kelly es difícilmente aplicable de forma directa a la gestión de carteras puesto que solo permite tener en cuenta casos muy simples: gano o pierdo todo con una única probabilidad. La inversión en los mercados bursátiles es mucho más compleja, se puede ganar o perder cantidades con diferentes probabilidades para cada ganancia o pérdida y, en consecuencia, la utilización de la fórmula de Kelly no puede aplicarse directamente en estos casos.

La cita en los medios del experimento mencionado y este artículo vienen a cuento porque hace algo más de un mes publiqué un libro[v] en el que, entre otros temas, se desarrolla una metodología para obtener carteras de máximo crecimiento sujetas a restricciones que permiten limitar el riesgo requerido o deseado por un inversor. En el libro, entre otros temas, se expone la fórmula de Kelly como un caso particular de optimización de carteras de crecimiento. También trata extensamente el problema de *asset allocation*[vi] y se desarrollan multitud de ejemplos de cómo llevar a la práctica estos cálculos.

LA RENTABILIDAD DE UNA CARTERA CON Y SIN REPOSICIÓN DE CAPITAL

En general, para saber el valor de una cartera con dos activos, lo que hacemos es calcular el valor esperado. Así por ejemplo, si la cartera A tiene una probabilidad de un 50% de ganar un 2% y un 50% de perder un 1%, calcularemos la ganancia esperada de esta cartera como:

Cartera A: $0{,}5 \times 2\% + 0{,}5 \times (-1\%) = 0{,}5\%$

Y con la misma metodología, podemos calcular la ganancia esperada de otra cartera, B, en la que se tiene una probabilidad del 50% de ganar un 25% y un 50% de perder un 20%:

Cartera B: $0{,}5 \times 25\% + 0{,}5 \times (-20\%) = 2{,}5\%$

Al margen de consideraciones de riesgo (más adelante volveremos a ellas), parece claro que la cartera B es preferible a la A. Su rentabilidad es 5 veces superior (2,5% de la B contra 0,5% de A). Sucede, sin embargo, que esta solución solo es válida si cada vez que se tiene una ganancia o una pérdida se repone el capital a la situación inicial, esto es, si he ganado retiro las ganancias obtenidas y si he perdido, repongo las pérdidas.

En realidad, la mayoría de los inversores, no retira las ganancias o repone las pérdidas cada vez que se produce una variación de su capital. Es lo que sucede, por ejemplo, en cualquier fondo de inversión. En este caso, la solución anterior no es la correcta. Cuando no se produce la reposición del capital sino que se mantienen las ganancias o pérdidas en el mismo fondo, la rentabilidad esperada de estas carteras se calcula como:

Cartera A: $(1+2\%)^{0,5} \times (1-1\%)^{0,5} = 0{,}4888\%$

Cartera B: $(1+25\%)^{0,5} \times (1-20\%)^{0,5} = 0\%$

Como puede verse, ahora, la mejor cartera con mucha diferencia es la A y no la B. De hecho la B que tenía una rentabilidad esperada del 2,5%, resulta que tiene una rentabilidad igual a cero.

LA f^* ÓPTIMA O EL PORCENTAJE ÓPTIMO A REINVERTIR

Es posible mejorar considerablemente la rentabilidad de la cartera B simplemente invirtiendo, cada vez que se produce una ganancia o pérdida, un porcentaje constante del capital que se tiene en cada momento y dejando el resto del capital sin invertir, esto es, con una rentabilidad igual a cero. Este porcentaje a invertir (f^* óptima) se puede calcular, en este caso, de manera muy sencilla con la siguiente fórmula:

$$f^* = -\frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{(p_1 + p_2) r_1 r_2}$$

donde las probabilidades de ganar y perder son p_1 y p_2 y las rentabilidades esperadas de ganar y perder son de r_1 y r_2, respectivamente.

Aplicando esta fórmula a las carteras A y B anteriores nos queda:

$$f_A^* = -\frac{0,5\text{x}2\% + 0,5\text{x}(-1\%)}{(0,5+0,5)\text{x}2\%\text{x}(-1\%)} = 25$$

$$f_B^* = -\frac{0,5\text{x}25\% + 0,5\text{x}(-20\%)}{(0,5+0,5)\text{x}25\%\text{x}(-20\%)} = 0,5$$

La solución de la cartera A nos dice que debemos apostar 25 veces nuestro capital. Sin embargo, como suponemos que no se permite ningún apalancamiento, la solución sería en este caso invertir todo el capital del que disponemos (f_A^* =1).

En la cartera B, en cambio, debemos reinvertir cada vez, solo la mitad del capital (f_B^* =0,5) que tengamos en cada momento.

Si aplicamos la política de inversiones determinada por la f^* óptima, las ganancias en la cartera A y B serán del 0,488% y 0,623% respectivamente. Estas rentabilidades las podemos calcular mediante la fórmula:

$$\rho = (1 + f^* r_1)^{p_1} (1 + f^* r_2)^{p_2} - 1$$

que aplicada a las dos carteras, donde como hemos visto: f_A^*=1 y f_B^*=0,5, nos proporciona las siguientes tasas de crecimiento medio:

$$\rho_A = (1 + 1\text{x}2\%)^{0,5} (1 - 1\text{x}1\%)^{0,5} - 1 = 0,4888\%$$

$$\rho_B = (1 + 0,5\text{x}25\%)^{0,5} (1 - 0,5\text{x}20\%)^{0,5} - 1 = 0,623\%$$

En definitiva, si se sigue una política óptima de inversión en ambas carteras, la B con una rentabilidad esperada del 0,623% es mejor que la A que tiene solo una del 0,488%.

Volviendo al experimento del artículo Haghani y Dewey citado al principio y aplicando las fórmulas que acabamos de ver, obtendríamos que la política de apuesta óptima sería la que efectivamente se expone en el citado artículo[VII]. Efectivamente:

$$f_{Bloom}^* = -\frac{0,6\text{x}100\% + 0,4\text{x}(-100\%)}{(0,6+0,4)\text{x}100\%\text{x}(-100\%)} = 20\%$$

Y el crecimiento medio del par ganancia-pérdida:

$$\rho_{Bloom} = (1 + 20\%\text{x}100\%)^{0,4} (1 - 20\text{x}100\%)^{0,6} - 1 = 2,03396\%$$

Para tener una ganancia esperada de 250 dólares a partir de un capital inicial de 25, hace falta echar la moneda trucada en media un poco más de 228 veces (114 pares de cara y cruz) y apostar en cada tirada el 20% del capital que tengamos en cada momento:

$$25\text{x}(1 + 2,03396\%)^{114} \approx 250$$

El lector puede jugar a este juego directamente en una hoja de cálculo o ir a una página web que dan los autores[VIII] y comprobar su propio resultado.

LA FÓRMULA DE KELLY: UN CASO PARTICULAR DE UNA POLÍTICA DE CRECIMIENTO MÁXIMO

La fórmula desarrollada por Kelly para ser aplicada a juegos de azar, y utilizada en el experimento descrito, es tan solo un caso particular de una función de utilidad más general llamada logarítmica. La aplicación de la fórmula de Kelly a los mercados de valores es muy limitada ya que solo permite ganar todo lo que se apuesta con una determinada probabilidad o perder todo lo apostado con una probabilidad igual a 1 menos la de ganancia. Y, naturalmente, esto es demasiado simple para ser aplicado, sin más, a la inversión en activos cotizados en mercados financieros.

Una función de utilidad logarítmica pretende maximizar la tasa de crecimiento y su formulación más general permite aplicar sus resultados a situaciones como las que se le presentan a cualquier inversor, esto es, determinar los porcentajes a invertir en cada uno de los activos financieros que maximicen la tasa de rentabilidad o crecimiento. En la formulación general es posible utilizar funciones de distribución discretas o continuas asociadas a cada activo financiero como las que se le presentan a cualquier inversor.

Uno de los problemas de este tipo de modelos de crecimiento es que tienden a incrementar el riesgo por encima de los niveles que se pueden considerar normales o razonables por muchos inversores. Por ello, se hace necesario, al maximizar el crecimiento, limitar o controlar el riesgo asociado a la cartera deseada.

En el apartado siguiente, exponemos un caso simplificado en el que se permite un activo con riesgo con una función de distribución de probabilidad muy simple y un activo sin riesgo. El objetivo es tan solo ilustrar sobre un paso adicional hacia la generalización de una formulación más general pero de utilidad directa en la gestión de carteras. También ilustrar sobre el binomio crecimiento riesgo.

LA DETERMINACIÓN DE LA f^* EN UN ASSET ALLOCATION CON DOS ACTIVOS FINANCIEROS, UNO CON RIESGO Y OTRO SIN RIESGO

Una ampliación natural de los ejemplos anteriores es aquella en la que tenemos dos activos, uno con riesgo con una probabilidad p_1 de tener una rentabilidad (positiva) r_1 y una probabilidad p_2 de una rentabilidad (negativa) r_2. Y un activo sin riesgo, con una rentabilidad de r_f con probabilidad 1. La fórmula para calcular el porcentaje óptimo, esto es, aquel que maximiza la tasa de crecimiento, a invertir en el activo con riesgo es:

$$f^* = -\frac{(1+r_f)\left[p_1(r_1-r_f)+p_2(r_2-r_f)\right]}{(p_1+p_2)(r_1-r_f)(r_2-r_f)}$$

Naturalmente, (1-f) es el porcentaje a invertir en el activo sin riesgo.

Para verlo en un ejemplo numérico, supongamos ahora que nuestro activo con riesgo tiene una probabilidad del 50% de ganar un 25% y del 50% de perder un 15%. La rentabilidad del activo sin riesgo es del 4%. La fracción a invertir en el activo con riesgo es del 26,065%:

$$f^* = -\frac{(1+0,04)\text{x}[(0,50)\text{x}(0,25-0,04)+(0,50)\text{x}(-0,15-0,04)]}{(0,50+0,50)\text{x}(0,25-0,04)\text{x}(-0,15-0,04)} = 26,065\%$$

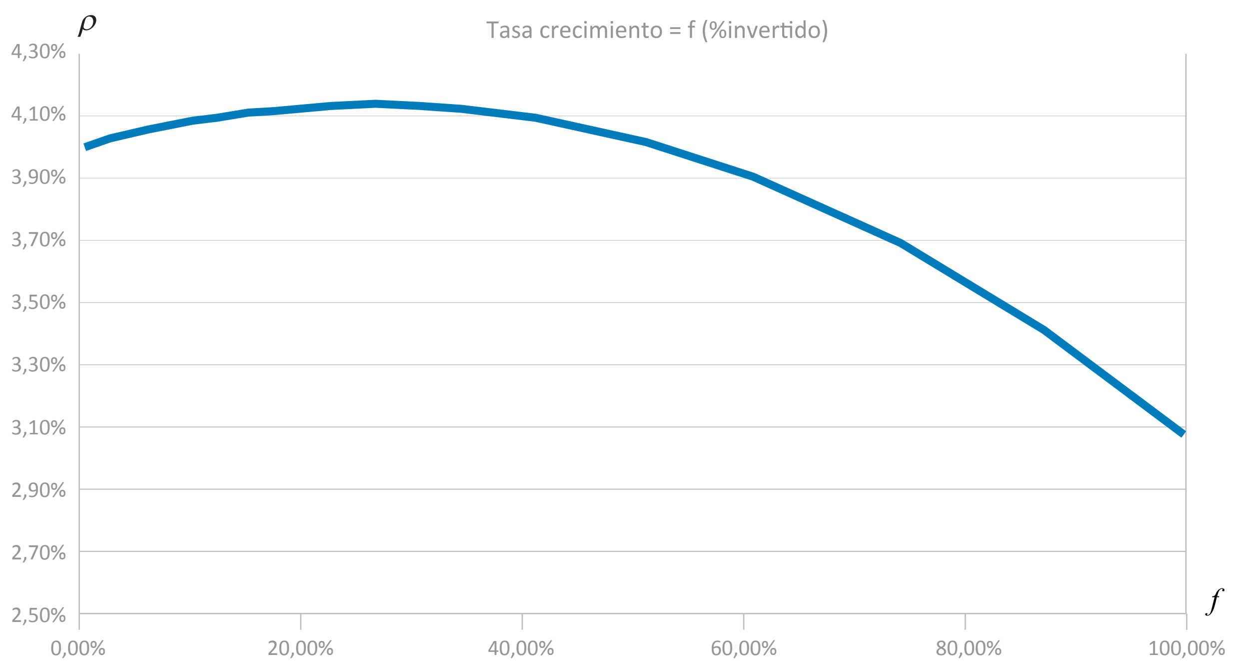
Es interesante ver como varía la rentabilidad en función del porcentaje del capital invertido en el activo con riesgo (véase figura 1).

A medida que se va aumentando el capital invertido en el activo con riesgo y, por tanto, el nivel de riesgo, aumenta la rentabilidad de la inversión, desde un 4% cuando todo se invierte en el activo sin riesgo hasta un 4,13% que es donde se encuentra el porcentaje a invertir en el activo con riesgo que hace máxima la rentabilidad de la inversión. Sin embargo, a partir de este punto (4,13%), la rentabilidad esperada empieza a disminuir de forma que de invertir el 100% en el activo con riesgo, la rentabilidad esperada baja hasta el 3,08%.

Obsérvese que si tomásemos una decisión sobre la base de reponer el capital cada vez que se produce alguna ganancia o pérdida, llegaríamos a una conclusión bien distinta. La rentabilidad esperada en este último caso para el activo con riesgo sería del 5% (0,5x25%-0,5x15%). Esto significa que, si no tenemos en cuenta la aversión al riesgo del inversor, invertiríamos todo en renta variable. Y si tuviéramos en cuenta esta aversión, invertiríamos un porcentaje en renta variable según el riesgo que el inversor estuviera dispuesto a asumir. En todo caso, es claro que, si optara por invertir todo en renta variable y no repusiera su capital (lo más habitual) su rentabilidad no sería del 5% sino del 3,08%.

Del ejemplo anterior y, en general, podemos decir que la primera parte de la curva (hasta el punto máximo) es dominante sobre la segunda. Dicho de otra forma, nunca nos interesará invertir en porcentajes que están a la derecha del punto máximo. Los que están a la izquierda pueden tener la misma rentabilidad pero con menor riesgo.

FIGURA 1 - TASA DE CRECIMIENTO EN FUNCIÓN EL PORCENTAJE INVERTIDO EN EL ACTIVO CON RIESGO



LA DETERMINACIÓN DEL ASSET ALLOCATION EN CASOS MÁS GENERALES Y EL CONTROL DEL RIESGO.

Cuando el activo con riesgo tiene, no solo dos posibilidades de rentabilidad con sus probabilidades asociadas, tal como acabamos de ver en el apartado anterior, sino que tiene múltiples o infinitas, la solución óptima no se puede obtener mediante una sencilla fórmula sino que es necesario utilizar un optimizador como, por ejemplo, SOLVER. También es posible obtener una solución con una simple fórmula en algunos casos sencillos en los que la función de probabilidad del activo sin riesgo sigue una determinada función de distribución de probabilidad.

En los modelos más tradicionales tipo media-varianza, es necesario fijar la rentabilidad y el riesgo para determinar la cartera óptima. En los modelos de crecimiento no es estrictamente necesario fijar el riesgo máximo que el inversor está dispuesto a asumir. En principio, nos basta con decir que lo que queremos es maximizar nuestra rentabilidad.

El problema es que los modelos de máximo crecimiento a veces pueden dar soluciones de carteras con un elevado nivel de riesgo. A veces, ganar unas décimas a la rentabilidad supone unos incrementos importantes del riesgo. Y este incremento de riesgo puede no convenir a muchos inversores que deben ajustar su cartera a un riesgo máximo que pueden o quieren asumir. O, visto de otra forma, los incrementos adicionales de rentabilidad pueden no compensar el aumento del nivel de riesgo que el inversor está dispuesto a soportar.

En el libro citado, y del que soy autor, se expone una solución más amplia que la fórmula de Kelly, que sí resulta directamente aplicable a los mercados financieros. En este contexto, la fórmula de Kelly es, tan solo, un caso particular del modelo más general expuesto en el mencionado libro.

NOTAS

(I) Véase por ejemplo: Tracy Alloway en Bloomberg (26/10/2016): (http://bloom.bg/2dKdLxR) y En The Economist (2/11/2016): (http://www.economist.com/blogs/buttonwood/2016/11/investing?cid1=cust/ddnew/n/n/n/20161101n/owned/n/n/nwl/n/n/EU/8010412/email&etear=dailydispatch)

(II) Hagahni Victor, Dewey Richard (https://elmfunds.com/blog/lessons-from-betting-on-a-biased-coin-cool-heads-and-cautionary-tales/)

(III) Esta es una fórmula desarrollada por J.L. Kelly en 1956 y posteriormente modificada por E. Thorp en 1969. Más adelante en este artículo nos referimos a esta fórmula.

(IV) Véase, por ejemplo: Villalba Daniel (2008). "¿Cómo invierten los inversores". Bolsas y Mercados Españoles. Revista BOLSA. También Antelo, Manel (2015). "Sobre el deficiente conocimiento económico y financiero de la población: ¿problema de oferta, demanda, sesgos,…?". Bolsas y Mercados Españoles. Web de Estudios y Publicaciones.

(V) Villalba, Daniel (2016) "Teoría y Práctica de la gestión de Carteras". Bolsas y Mercados Españoles. Colección Estudios e Investigación

(VI) Entendemos por *asset allocation* la proporción de activos con riesgo y activos sin riesgo que configuran una cartera. Esta proporción es la que, según algunos estudios, es la que mejor es capaz de explicar la rentabilidad de una cartera.

(VII) La fórmula aplicada por Haghani y Dewey es $f^* = (2*p-1)$, donde p es la probabilidad de ganancia.

(VIII) El juego se puede probar en http://coinflipbet.herokuapp.com/