

Claves para poder avanzar de la impredecibilidad al caos

# Análisis fractal de series temporales. Dimensión de correlación

**Este trabajo es una continuación del publicado en la Revista "Bolsa de Madrid" núm. 42, de Marzo de 1996, con el título: "El idioma de un nuevo paradigma financiero". En esta ocasión, el estudio se centra en el ámbito de las Series Temporales Fractales, para ello se ha recurrido a un mayor número de formulismos matemáticos, que nos permitirán el desarrollo de un nuevo concepto: la Dimensión de Correlación.**

La impredecibilidad está en todas partes: en un grifo que gotea, en un péndulo magnético, en el aire, en el clima, en el espacio... Las últimas décadas del siglo XX han sido testigos de la alianza entre la ciencia y uno de sus tradicionales adversarios: el Caos. La teoría del Caos se ha revelado como un poderoso instrumento para la comprensión de las irregularidades de la naturaleza y ha terminado con la idea clásica de que los sistemas sencillos, como el péndulo, hacen cosas sencillas, y que los sistemas complejos, como la economía, tienen comportamientos complejos.

### Definición de Dimensión de Correlación

En el artículo anterior, ya mencionamos las diferencias esenciales entre Dimensión Euclidiana y Dimensión Fractal, haciendo especial hincapié en el concepto de Dimensión de Capacidad, desarrollado por el matemático ruso Andrei Kolmogorov<sup>(1)</sup>.

Normalmente, la Dimensión de Capacidad es válida para fractales insertados en un espacio de dos dimensiones. Para sistemas de más dimensiones, es necesario usar hiperesferas con el número de dimensiones del sistema. Para solucionar este inconveniente, Grassberger y Procaccia<sup>(2)</sup> desarrollaron el concepto de **Dimensión de Correlación**<sup>(3)</sup>.

Se define la Integral de Correlación como:

$$C_m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i,j=1}^N \theta(r, Z_i, Z_j)}{N^2} \quad (1)$$

Donde:  
m: Dimensión de Inserción

- r: Distancia Umbral.
- Cm (r): Integral de correlación, o Probabilidad de que un par de puntos del sistema se encuentren a una distancia menor que r en la Dimensión m.
- N: Número de observaciones del sistema.
- Z<sub>i</sub>, Z<sub>j</sub>: Dos observaciones del sistema
- θ(r, Z<sub>i</sub>, Z<sub>j</sub>): Función de Heaviside: número de puntos del sistema que se encuentran a una distancia menor de r.

La Función de Heaviside se puede expresar de la forma:

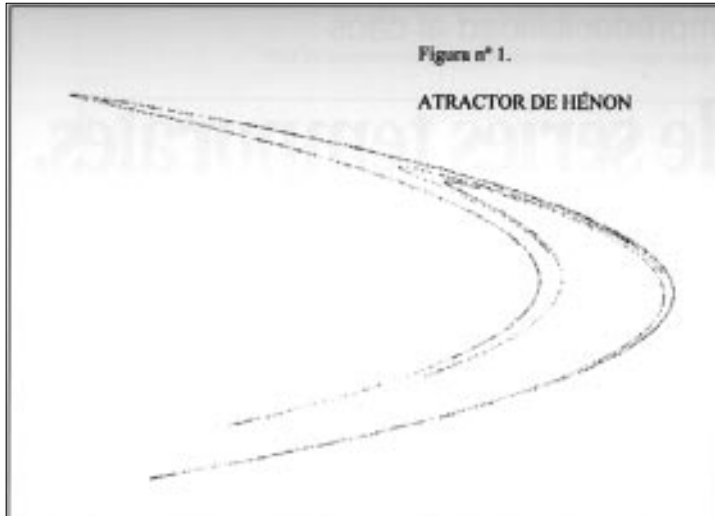
$$\theta(r, Z_i, Z_j) \begin{cases} = 1, & \text{si } (r - ||Z_i - Z_j||) > 0 \\ = 1, & \text{si } (r - ||Z_i - Z_j||) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde || || es algún tipo de distancia (la euclídea, por ejemplo).

Nótese que la Integral de Correlación **C<sub>m</sub>(r)** es tan sólo una función de probabilidad, en la que los casos favorables son el número de puntos contenidos en una hiperesfera de m dimensiones y de radio r (Función de Heaviside), y los casos posibles son el número de pares de puntos de los que esta formado el sistema (**N<sup>2</sup>**). El límite expresa la necesidad de conocer completamente el sistema (infinitas observaciones) para conocer el valor verdadero de la integral.

**CUADRO 1**

ITERACION	Xt	Xt+1
1	0,1	1,086
2	1,086	-0,6211544
3	-0,6211544	0,785634096
4	0,785634096	-0,05045563
5	-0,05045563	1,232126151
6	1,232126151	-1,14052548
7	-1,14052548	-0,45147987
8	-0,45147987	0,372474654
9	0,372474654	0,670323724
10	0,670323724	0,482674943



Grassberger y Procaccia consideran que para valores pequeños de  $r$ , se puede escribir que:

$$C_m(r) = r^{D_c} \quad (3)$$

y, aplicando logaritmos:

$$\text{Log } C_m(r) = D_c \cdot \text{Log } r \quad (4)$$

$$D_c = \text{Log } C_m(r) / \text{Log } r \quad (5)$$

siendo  $D_c$  la Dimensión de Correlación. Así mismo, los autores citados han demostrado que sus valores se encuentran cercanos a los valores de la Dimensión de Capacidad, y que no los excede es decir:

$$D_c \leq D \quad (6)$$

siendo  $D$  la Dimensión de Capacidad.

Esto permite distinguir los sistemas aleatorios de los no aleatorios: Sistemas Estocásticos No Lineales y Sistemas Deterministas No Lineales, siendo el Caos Determinista<sup>(4)</sup> una particularidad del último. Si el sistema es aleatorio, los valores de las variables estarán uniformemente repartidos, con lo que su Dimensión de Correlación tenderá a crecer junto con su Dimensión de Inserción. En los sistemas no aleatorios, la Dimensión de Correlación se mantendrá siempre por debajo de su Dimensión de Capacidad, independientemente del número de dimensiones en las que se inserte al sistema.

### Análisis del Atractor de Hénon

Para ilustrar lo expuesto anteriormente recurriremos al ya conocido Atractor de Hénon, siendo las ecuaciones que lo crean:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= 1 + Y_t - a \cdot X_t^2 \\ Y_{t+1} &= b \cdot X_t \end{aligned} \quad (7)$$

### CUADRO 2 Estadísticas de la regresión m=3

Coefficiente de Correlación Múltiple	0,99973546
Coefficiente de Determinación R <sup>2</sup>	0,99947099
R <sup>2</sup> Ajustado	0,99940487
Error Típico	0,00931665
Pendiente = Dc	1,19932047
Observaciones	10

### CUADRO 3 Estadísticas de la regresión m=4

Coefficiente de Correlación Múltiple	0,99850087
Coefficiente de Determinación R <sup>2</sup>	0,99700398
R <sup>2</sup> Ajustado	0,99662948
Error Típico	0,0233107
Pendiente = Dc	1,25936864
Observaciones	10

### CUADRO 4 Estadísticas de la regresión m=5

Coefficiente de Correlación Múltiple	0,99640304
Coefficiente de Determinación R <sup>2</sup>	0,99281902
R <sup>2</sup> Ajustado	0,9919214
Error Típico	0,03583912
Pendiente = Dc	1,24802095
Observaciones	10

### CUADRO 5 Estadísticas de la regresión m=6

Coefficiente de Correlación Múltiple	0,99462755
Coefficiente de Determinación R <sup>2</sup>	0,98928396
R <sup>2</sup> Ajustado	0,98794445
Error Típico	0,04354904
Pendiente = Dc	1,23920501
Observaciones	10

### CUADRO 6 Estadísticas de la regresión m=7

Coefficiente de Correlación Múltiple	0,99274734
Coefficiente de Determinación R <sup>2</sup>	0,98554728
R <sup>2</sup> Ajustado	0,98374069
Error Típico	0,05044229
Pendiente = Dc	1,23361616
Observaciones	10

con este Atractor se genera caos para los valores de  $a = 1.4$  y de  $b = 0.3$  (figura n° 1).

Construir un Atractor a través de las ecuaciones que lo determinan es relativamente simple, pero normalmente nos encontraremos sólo con los datos. David Ruelle<sup>(5)</sup> desarrolló un método para reconstruir los espacios de fase desde una única variable: el método "rellena" las otras dimensiones realizando retardos en la variable observada. En

el cuadro nº 1 se pueden observar los primeros diez valores de la variable  $X_t$  en la primera columna, y los primeros diez valores de la variable  $X_{t+1}$  en la segunda columna.

Si reconstruimos el Atractor con las variables  $X_t$ ,  $X_{t+1}$  y las iteramos un gran número de veces, obtendremos la figura nº 2, que es el Atractor de Hénon rotado 90 grados. En este caso habremos reconstruido el Atractor sólo con la variable  $X_t$ . Ruelle<sup>(6)</sup> ha demostrado matemáticamente que este Atractor posee la misma Dimensión Fractal que el reconstruido con las variables  $X_t$ ,  $Y_t$ . Esto nos permite tener definida una serie temporal ( $X_t$ ), de la que conocemos su Dimensión Fractal.

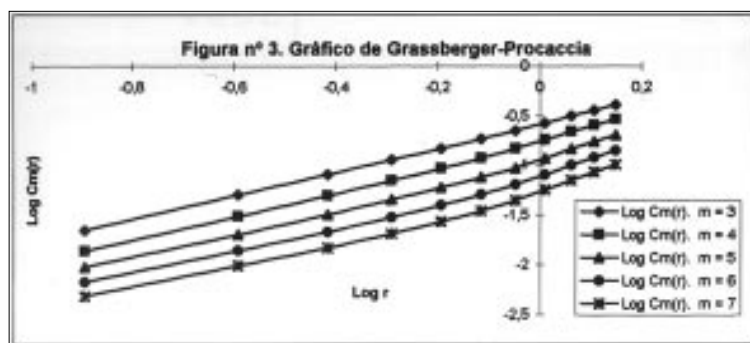
### Estimación de la Dimensión de Correlación

Hemos visto que  $\text{Log Cm}(r) = D_c \cdot \text{Log } r$  (4). Por lo que para una dimensión  $m$ , podemos calcular valores de  $C_m$  para valores cada vez mayores de  $r$ . Intuitivamente y para un sistema tridimensional, se trataría de situar una esfera en todos y cada uno de los puntos del sistema objeto de estudio, e ir incrementando el valor del radio  $r$  de las esferas hasta que todos los puntos queden dentro de ellas. Hallando la pendiente de la recta que define el gráfico de  $\text{Log Cm}(r)$  con  $\text{Log } r$ , y a través de una regresión lineal, podemos estimar la Dimensión de Correlación  $D_c$  para una Dimensión de Inserción  $m$ .

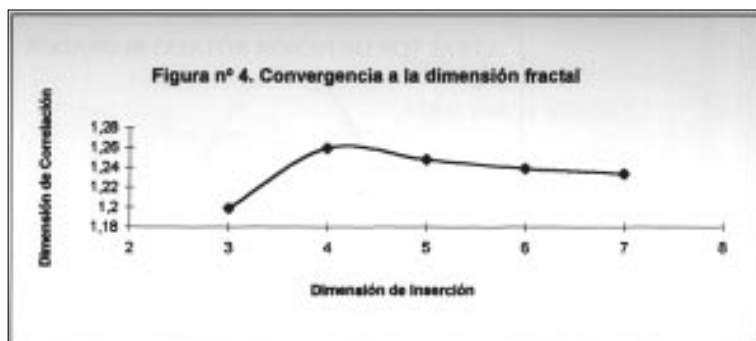


El procedimiento a seguir será sencillo: se trata de ir insertando la serie temporal  $X_t$  en dimensiones de inserción cada vez mayores, hasta que  $D_c$  converja hacia su Dimensión Fractal. La manera de realizar este análisis consiste en construir el gráfico de Grassberger-Procaccia<sup>(7)</sup>, en el cuál representaremos los valores de  $\text{Log Cm}(r)$  y de  $\text{Log } r$  para incrementos sucesivos en la Dimensión de Inserción  $m$ .

Se ha considerado una serie temporal  $X_t$  de 1000 datos, dado que se puede demostrar que el Atractor de Hénon se reconstruye a partir de 500 datos. Esta serie ha sido insertada en 3, 4, 5, 6 y 7 dimensiones. Los cuadros nº 2 al 6 son los resultados estadísticos de las regresiones para dichas dimensiones. La figura nº 3 representa el Gráfico



CUADRO 7. Valores de log r y de log Cm(r) para las distintas dimensiones de inserción					
Log r	Log Cm(r). m = 3	Log Cm(r). m = 4	Log Cm(r). m = 5	Log Cm(r). m = 6	Log Cm(r). m = 7
-0,893274568	-1,649338704	-1,857458598	-2,012337	-2,166757705	-2,310761366
-0,592244572	-1,291321474	-1,509253002	-1,691112551	-1,851539314	-2,001610143
-0,416153313	-1,087449369	-1,302299689	-1,492427654	-1,664095252	-1,824959283
-0,291214577	-0,942784922	-1,151569563	-1,343245088	-1,520483643	-1,683736432
-0,194304564	-0,828663077	-1,030724519	-1,221494303	-1,399353713	-1,561522559
-0,115123318	-0,734434031	-0,928529591	-1,120289678	-1,292187155	-1,454496172
-0,048176528	-0,647829182	-0,830088563	-1,024932104	-1,19165038	-1,348987463
0,009815419	-0,572435215	-0,741518898	-0,926777843	-1,091633926	-1,245013057
0,060967941	-0,502793302	-0,660802082	-0,835102603	-0,999870791	-1,15165132
0,106725432	-0,442973848	-0,597054367	-0,761257971	-0,919905152	-1,067190861
0,148118117	-0,391973209	-0,539031911	-0,695631429	-0,852771463	-0,996499005



de Grassberger - Procaccia y el cuadro nº 7, los valores de  $\text{Log Cm}(r)$  y de  $\text{Log } r$  para las diferentes dimensiones de inserción. La figura nº 4 representa de forma esquemática la convergencia hacia la Dimensión Fractal. Como se puede observar, la Dimensión Fractal no crece con la Dimensión de Inserción  $m$ , sino que se encuentra más o menos estable en valores cercanos a  $1'26$  (valor al que se acerca su Dimensión de Capacidad<sup>(8)</sup>), por lo que nos encontramos en presencia de un sistema no aleatorio.

### Implicaciones

Con este pequeño ejemplo, podemos concluir que la aplicación del concepto de Dimensión de Correlación a las Series Financieras puede resultar de gran interés, ya que nos ayudará a distinguir aquellas que son aleatorias de las que no lo son. Pero como indica el profesor Fernández Díaz<sup>(9)</sup>:

“¿Qué es lo que conseguimos con el hecho de detectar y conocer la existencia de un comportamiento caótico? En primer lugar la necesidad de precisión en el conocimiento del modelo, de los valores iniciales de las variables, y de las variaciones de los parámetros, supone un avance en el camino hacia planteamiento reales y complejos. Pero además, en segundo lugar, es posible la predicción a corto plazo aun en presencia de caos, ya que las dificultades insalvables o impredecibilidad surgen tan sólo después de un número suficientemente grande de periodos”.

En las Series Financieras la cantidad de datos es escasa y puede existir un componente sustancial de ruido, lo que puede distorsionar gravemente los resultados. Por eso hay que ser especialmente cauto en el análisis con este instrumento, dando a los resultados el valor que realmente poseen, intentado huir en todo momento de excesivos voluntarismos y reafirmando los resultados con la utilización de otras herramientas de análisis.

#### MIGUEL ANGEL SANCHEZ LOZANO.

Máster en Mercados Financieros por el Instituto de Estudios Superiores de la Fundación Universitaria San Pablo C.E.U.

#### JOSÉ MARIA VILLANUEVA Y VIGIL DE QUIÑONES.

Licenciado en Informática por la Universidad Pontificia de Salamanca. Especialidad de Marketing y Logística. Consultor de Telefónica para la Gestión e Implantación de Proyectos.

### BIBLIOGRAFIA:

- De Grawve, P; Dewachter, H; Embrechts, M. (1993): *Exchange Rate Theory. Caotic Models of Foreing Exchange Markets*, Blackwell, Cambridge.
- Fernandez Díaz, A. (1994): *La Economía de la Complejidad*, Mc Graw-Hill, Madrid.
- Johnston, J. (1984): *Econometrics Methods*, Mc Graw-Hill, Nueva York.
- Mandelbrot, B.M. (1983): *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, Nueva York.
- Mandelbrot, B.M. (1993): *Los Objetos Fractales*, Tusquets Editores, Barcelona.
- Montero Lorenzo, J.M.; Sánchez Lozano, M.A. (1996): “El idioma de un nuevo paradigma financiero”, *Revista Bolsa de Madrid*, núm.42, págs. 4-14. Madrid.
- Olmeda, I. (1995): “Introducción a la teoría del Caos”, *Revista Bolsa de Madrid*, núm.29 págs. 16-20, Madrid.
- Peters, E.E. (1991): *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.
- Peters, E.E. (1994): *Fractal Market Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York.

### NOTAS:

- (1). Sobre este punto véase: J.M. Montero Lorenzo; M.A. Sánchez lozano: “El idioma de un nuevo paradigma financiero”, *Revista Bolsa de Madrid*, Madrid, num. 42, 1996, págs. 4-14.
- (2). Peters E.E.: *Chaos and Order in the Capital markets*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1991, pág. 155.
- (3). En el desarrollo de este punto vamos a seguir el texto: Fernández Díaz, A.: *La Economía de la Complejidad*, Mc Graw Hill, Madrid, 1994, pág. 151.
- (4). Para más información consultar: Peters, E.E.: *Fractal Market Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, pág 247.
- (5). Peters E.E.: *Chaos and Order in the Capital markets*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1991, pág. 152.
- (6). Peters E.E.: *Chaos and Order in the Capital markets*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1991, pág. 153.
- (7). Véase: Olmeda, I. (1995): “Introducción a la Teoría del Caos”. *Revista Bolsa de Madrid*, num.29, pág.19.
- (8). Nos remitimos a la obra: Fernández Díaz, A.: *La Economía de la Complejidad*, Mc Graw Hill, Madrid, 1994, pág. 94.
- (9). Nos remitimos a la obra: Fernández Díaz, A.: *La Economía de la Complejidad*, Mc Graw Hill, Madrid, 1994, pág. 147.